

## SUBIECTUL II. Exoplanete

TESS (The Transiting Exoplanet Survey Satellite) este un telescop spațial creat pentru a descoperi și observa exoplanete. Există un proiect de citizen science unde oamenii pot observa și marca tranzitele exoplanetelor în curbele de lumină venite de la TESS: Planet Hunter TESS, disponibil la:

<https://www.zooniverse.org/projects/nora-dot-eisner/planet-hunters-tess>.

- A. În acest subpunct se dau 5 curbe de lumină (Figurile denumite WASP-\*) a unor tranzite de exoplanete descoperite prima dată de misiunea WASP – Wide Angle Search for Planets și observate apoi cu TESS. Pe axa OX sunt reprezentate zilele scurse din momentul primei observații, iar pe axa OY este trecut procentul din luminozitatea medie cu care crește sau descrește luminozitatea sistemului față de luminozitatea medie a stelei. Se cere să se determine perioada fiecărei planete  $T$  (4p) și raportul  $\frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}}$  (4p) în fiecare situație, cu incertitudinile corespunzătoare (răspunsul se va da sub forma *valoarea medie*  $\pm$  *eroarea medie*, utilizând un minim de 4 măsurători acolo unde sunt disponibile).
- B. Pentru acest subpunct se dă o curbă de lumină cu două minime de valori diferite (graficul numit Obiect necunoscut). Două fenomene diferite pot crea o curbă de lumină cu acest aspect:
1. O stea tranzitată de două planete cu raze, mase și/sau semiaxe mari diferite.
  2. Steaua este de fapt un sistem binar cu eclipsă, iar punctele de minim sunt momentele când o eclipsă se produce în sistem.
- B1. Pentru cazul 1, determinați care sunt perioadele orbitale a celor două planete și care sunt valorile raportului  $\frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}}$  pentru fiecare planetă. (1.5p)
- B2. Pentru cazul 2, determinați perioada sistemului, raportul luminozităților celor două stele și raportul razelor celor două stele. Considerați cazul în care steaua mai mică este mai fierbinte. (1.5p)
- B3. Care situație este mai probabilă pentru curba de lumină dată? Argumentați răspunsul dat. (1p)

## BAREM

- A. Pentru fiecare planetă se măsoară de minim 4 ori perioada (distanța dintre două minime consecutive, sau distanța dintre minimul 1 și 3, care apoi se împarte la 2, sau tot așa) și adâncimea a minim 4 minime. Se realizează măsurători repetate pentru a micșora eroarea de măsurare și a obține rezultate mai exacte, și pentru a reduce sursele de eroare care pot afecta observațiile într-un singur punct, dar nu în toate punctele de minim.

Pentru a măsura perioada, întâii se măsoară pe foaie câți cm corespund unei zile, iar apoi cu regula de trei simplă se calculează câte zile corespund centimetrilor măsurați între două minime consecutive.

De exemplu:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ zi} \dots\dots\dots 2,3 \text{ cm} \\ X \text{ zile} \dots\dots\dots 2,2 \text{ cm} \end{array} \quad \Rightarrow T = \frac{2,2 \text{ cm} \times 1 \text{ zi}}{2,3 \text{ cm}} = 0,96 \text{ zile}$$

Valorile numerice exacte în cm pot fi diferite în funcție de cum a fost imprimată imaginea, dar rezultatul în zile va fi același.

În tabel, valorile cu mai multe zecimale sunt obținute prin măsurarea în cm a mai multor perioade și împărțire. Perioada medie se calculează ca media aritmetică a perioadelor obținute. Eroarea va fi valoarea medie minus valoarea măsurată, iar eroarea medie va fi media aritmetică a valorilor absolute a erorilor obținute.

Asemănător se realizează măsurătorile și pentru minim.

$$\begin{array}{l} 1\% \dots\dots\dots 4,6 \text{ cm} \\ Y\% \dots\dots\dots 5,4 \text{ cm} \end{array} \quad \Rightarrow Y = \frac{5,4 \text{ cm} \times 1\%}{4,6 \text{ cm}} = 1,17\%$$

Pentru a calcula raportul razelor, vom începe prin a nota valoarea minimului în procente cu  $n\%$ . Din descrierea axei OY putem scrie:

$$L_{\text{tranzit}} - L_0 = \frac{n}{100} \times L_0$$

Unde  $L_0$  este luminozitatea medie a sistemului (luminozitatea stelei fără tranzit), iar  $L_{\text{tranzit}}$  este luminozitatea sistemului în timpul minimului provocat de tranzit.  $L_{\text{tranzit}}$  se scrie sub forma:

$$L_{\text{tranzit}} = \frac{L_0}{\pi R^2} (\pi R^2 - \pi r^2)$$

Unde R este raza stelei și r este raza planetei. Calculul lui n devine:

$$\frac{L_0}{\pi R^2} (\pi R^2 - \pi r^2) - L_0 = \frac{n}{100} \times L_0$$

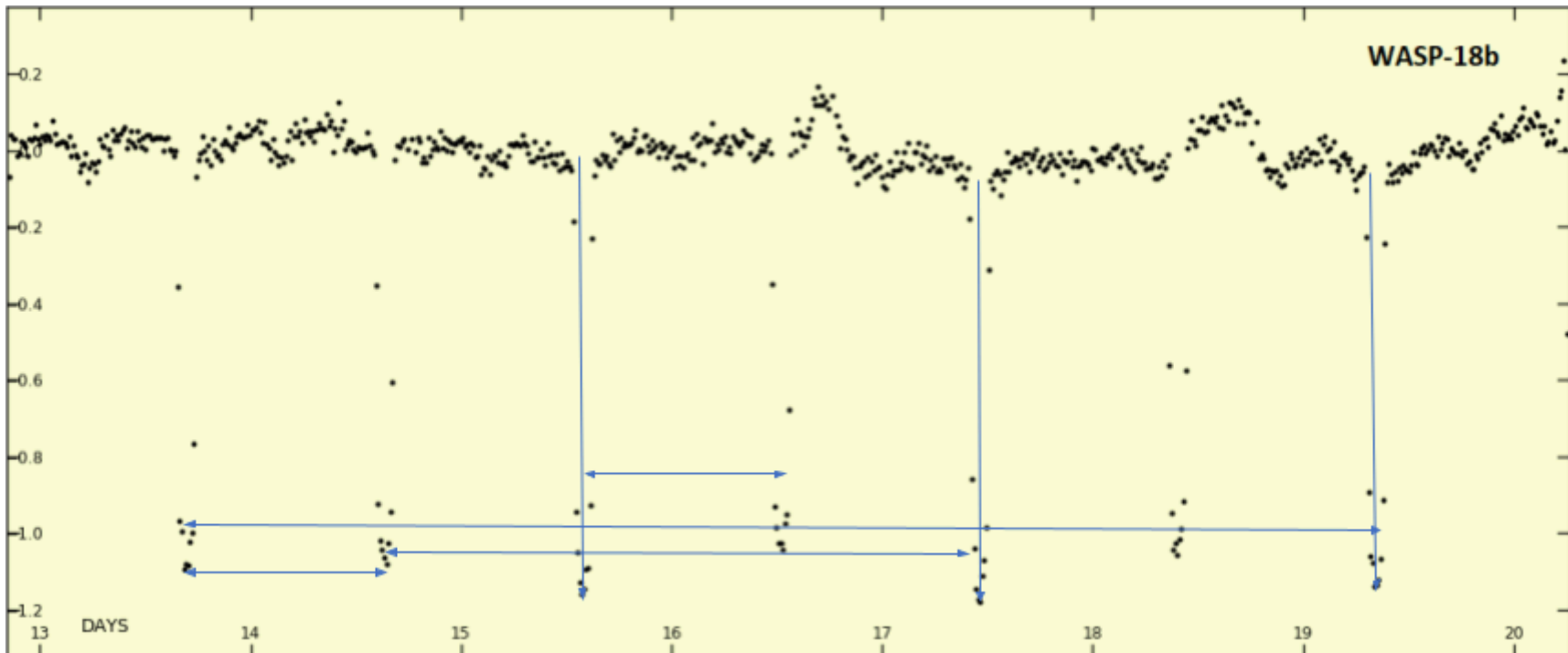
$$L_0 - L_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - L_0 = \frac{n}{100} \times L_0$$

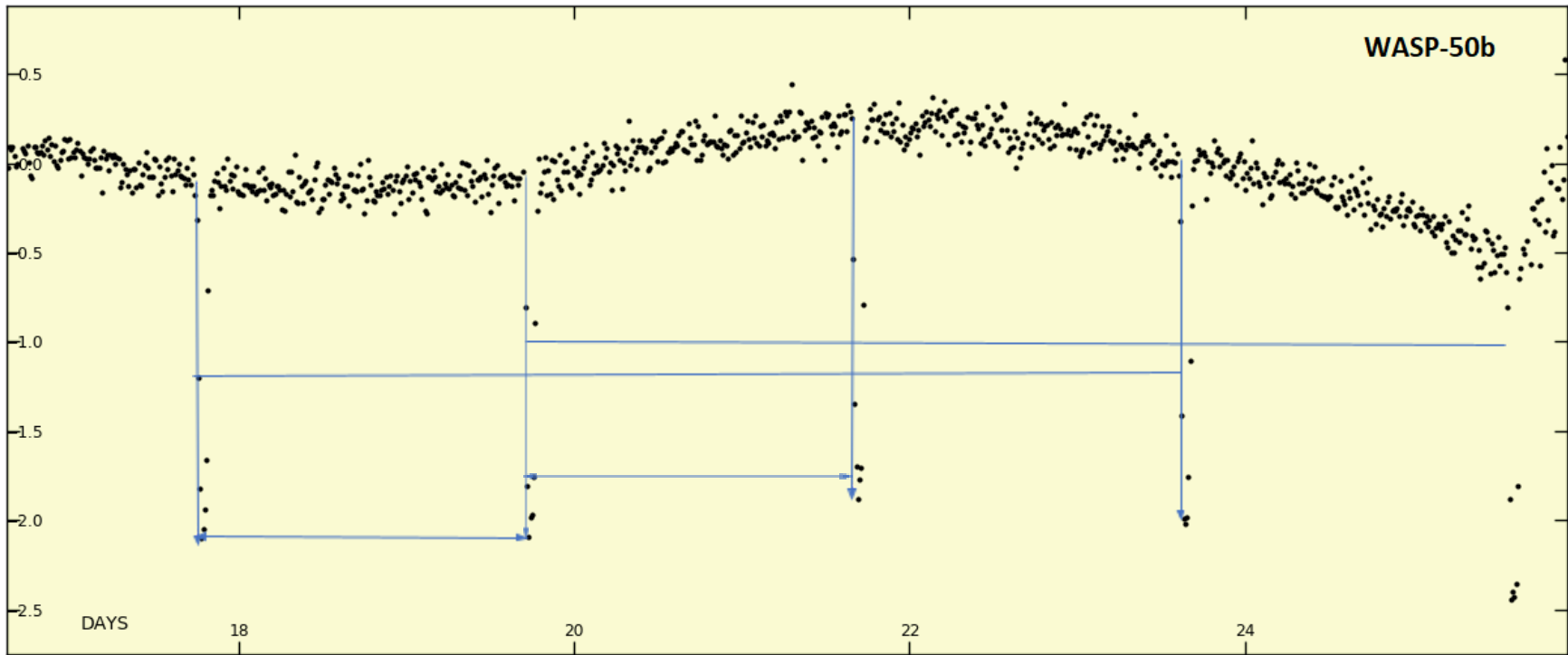
$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{-n}{100} \Rightarrow \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{|n|}{100}}$$

Rezultatele numerice se găsesc în tabelul de după grafice.

1 zi ..... 2,3 cm **(0.1p)**

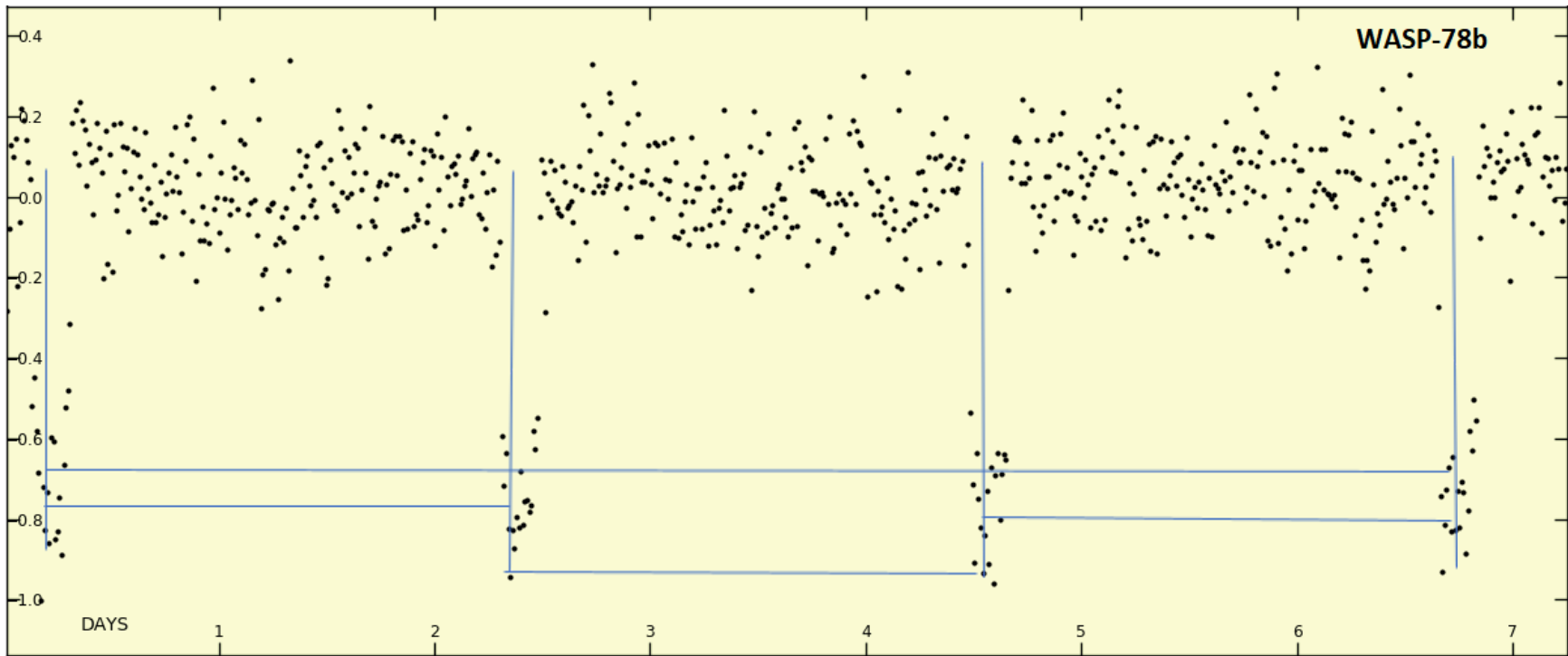
1% ..... 4,6 cm **(0.1p)**





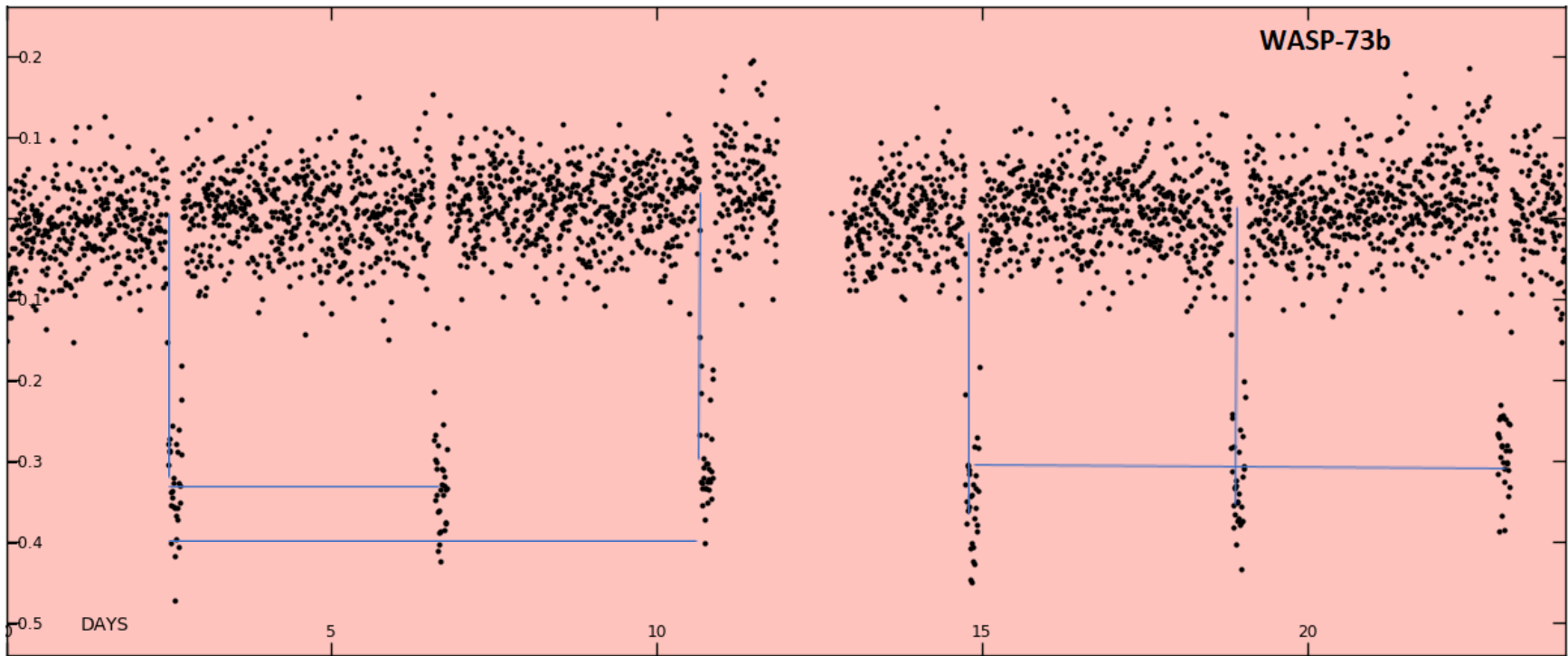
4 zile ..... 8,3 cm (0.1p)

0,5% .....1,1 cm (0.1p)



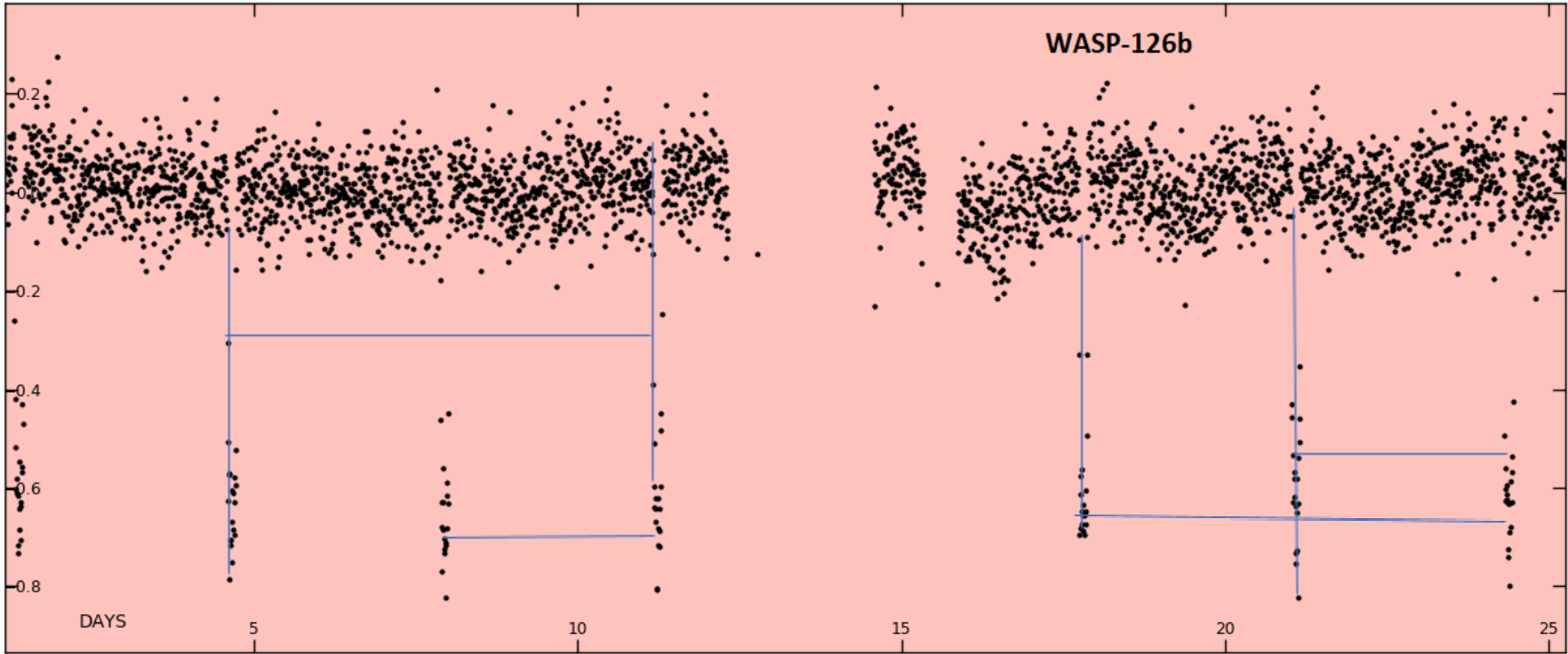
3 zile ..... 8 cm (0.1p)

0,2% .....1 cm (0.1p)



5 zile ..... 4 cm (0.1p)

0,1% .....1 cm (0.1p)



5 zile ..... 4 cm      **(0.1p)**

0,2% ..... 1,2 cm      **(0.1p)**

| Planeta  | Perioda (cm) | Perioda (zile) | Perioda Medie (zile) | Eroarea (zile) | Eroarea Medie (zile) | Valoarea minimului (cm) | Valoarea minimului (%) | $\frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}}$ | $\frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}}$ medie | Eroarea  | Eroarea Medie |
|----------|--------------|----------------|----------------------|----------------|----------------------|-------------------------|------------------------|---|---|----------|---------------|
| WASP-18b | 2,2          | 0,957          | 1,012                | 0,055          | 0,0335               | 5,4                     | 1,17                   | 0,108   | 0,1055  | -0,0025  | 0,015         |
|          | 2,39         | 1,039          |                      | -0,027         |                      | 5,2                     | 1,13                   | 0,106   |   | -0,0005  |               |
|          | 2,3          | 1              |                      | 0,012          |                      | 5,1                     | 1,11                   | 0,105   |   | 0,0005   |               |
|          | 2,42         | 1,052          |                      | -0,04          |                      | 4,9                     | 1,07                   | 0,103   |   | 0,0025   |               |
| WASP-50b | 4,1          | 1,976          | 1,954                | -0,022         | 0,014                | 4,4                     | 2                      | 0,141   | 0,143   | 0,002    | 0,00175       |
|          | 4            | 1,928          |                      | 0,026          |                      | 4,5                     | 2,045                  | 0,143   |   | 0        |               |
|          | 4,07         | 1,961          |                      | -0,007         |                      | 4,7                     | 2,136                  | 0,146   |   | -0,003   |               |
|          | 4,05         | 1,952          |                      | 0,002          |                      | 4,4                     | 2                      | 0,141   |   | 0,002    |               |
| WASP-78b | 5,8          | 2,175          | 2,187                | 0,012          | 0,0395               | 5,1                     | 1,02                   | 0,101   | 0,10025   | -0,00075 | 0,00175       |
|          | 5,9          | 2,212          |                      | -0,025         |                      | 5,3                     | 1,06                   | 0,103   |   | -0,00275 |               |
|          | 5,8          | 2,175          |                      | 0,012          |                      | 4,9                     | 0,98                   | 0,099   |   | 0,00125  |               |
|          | 5,83         | 2,186          |                      | 0,001          |                      | 4,8                     | 0,96                   | 0,098   |   | 0,00225  |               |
| WASP-73b | 3,3          | 4,125          | 4,172                | 0,047          | 0,0468               | 3,5                     | 0,35                   | 0,0592  | 0,0606  | 0,0014   | 0,0007        |
|          | 3,3          | 4,125          |                      | 0,047          |                      | 3,7                     | 0,37                   | 0,0608  |   | -0,0002  |               |
|          | 3,35         | 4,1875         |                      | -0,0155        |                      | 3,8                     | 0,38                   | 0,0616  |   | -0,001   |               |



|           |      |        |        |         |        |     |       |        |         |          |        |
|-----------|------|--------|--------|---------|--------|-----|-------|--------|---------|----------|--------|
|           | 3,4  | 4,25   |        | -0,078  |        | 3,7 | 0,37  | 0,0608 |         | -0,0002  |        |
| WASP-126b | 2,6  | 3,25   | 3,2813 | 0,033   | 0,0625 | 4,3 | 0,717 | 0,0847 | 0,08435 | -0,00035 | 0,0027 |
|           | 2,65 | 3,3125 |        | -0,0295 |        | 4,2 | 0,7   | 0,0837 |         | 0,00065  |        |
|           | 2,6  | 3,25   |        | 0,033   |        | 3,8 | 0,633 | 0,0796 |         | 0,00475  |        |
|           | 2,65 | 3,3125 |        | -0,0295 |        | 4,8 | 0,8   | 0,0894 |         | -0,00505 |        |

Se acordă pentru fiecare planetă:

0.2p - pentru valoarea perioadei

0.1p - pentru eroarea calculării perioadei - se acordă doar dacă elevul are minim 4 măsurători

0.2p - pentru valoarea raportului razei

0.1p - pentru eroarea calculării raportului razelor- se acordă doar dacă elevul are minim 4 măsurători

total = 5 x (0.2+0.1+0.2+0.1)= 3p

$$\text{WASP-18b: Perioada } T = 1,01 \pm 0,03 \text{ zile, } \frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}} = 0,11 \pm 0,02$$

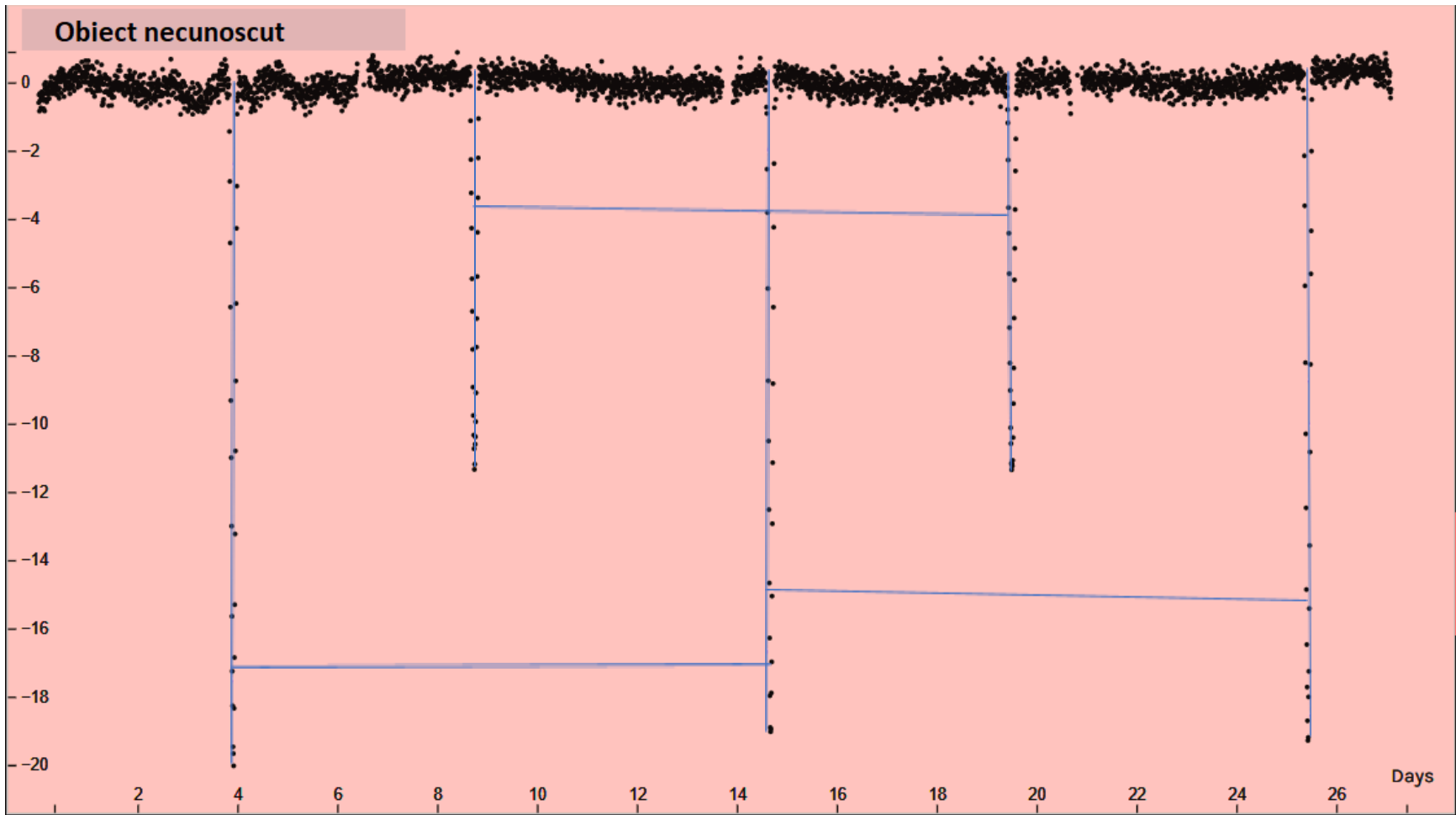
$$\text{WASP-50b: Perioada } T = 1,95 \pm 0,01 \text{ zile, } \frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}} = 0,143 \pm 0,002$$

$$\text{WASP-78b: Perioada } T = 2,19 \pm 0,04 \text{ zile, } \frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}} = 0,100 \pm 0,002$$

$$\text{WASP-73b: Perioada } T = 4,17 \pm 0,05 \text{ zile, } \frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}} = 0,0606 \pm 0,0007$$

$$\text{WASP-126b: Perioada } T = 3,28 \pm 0,06 \text{ zile, } \frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}} = 0,084 \pm 0,003$$

B. Pentru grafic, 2 zile = 1,3 cm; 2% = 0,9 cm.



B1. Pentru minimul secundar există o singură măsurătoare pentru perioadă.

| Planeta         | Perioada (cm) | Perioada (zile) | Perioada Medie (zile) | Eroarea (zile) | Eroarea Medie (zile) | Valoarea minimului (cm) | Valoarea minimului (%) | $\frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}}$ | $\frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}}$ medie | Eroarea | Eroarea Medie |
|-----------------|---------------|-----------------|-----------------------|----------------|----------------------|-------------------------|------------------------|---|---|---------|---------------|
| Minim principal | 7,2           | 11,08           | 11                    | -0,08          | 0,053                | 9,1                     | 20,22                  | 0,450   | 0,445   | -0,005  | 0,033         |
|                 | 7,1           | 10,92           |                       | 0,08           |                      | 8,7                     | 19,33                  | 0,440   |   | 0,005   |               |
|                 | 7,15          | 11              |                       | 0              |                      | 8,9                     | 19,78                  | 0,445   |   | 0       |               |
| Minim secundar  | 7,2           | 11,08           | -                     | -              | -                    | 5,3                     | 11,78                  | 0,343   | 0,3415  | -0,0015 | 0,0015        |
|                 |               |                 |                       | -              |                      | 5,2                     | 11,56                  | 0,34  |   | 0,0015  |               |

perioada minim principal - **(0.4p)**

raport raze minim principal - **(0.4p)**

perioada minim secundar - **(0.3p)**

raport raze minim secundar - **(0.4p)**

B2. Dacă obiectul necunoscut este un sistem binar, avem:

$$n_{\text{minim principal}} = \frac{20,22+19,33+19,78}{3} = 19,78 \text{ (0.4p)}$$

$$n_{\text{minim secundar}} = \frac{11,78+11,56}{2} = 11,67 \text{ (0.4p)}$$

Perioada sistemului va fi distanța dintre două minime consecutive de același fel, deci putem folosi valorile măsurate la punctul anterior, cu diferența ca și separarea temporală dintre minimele secundare reprezintă tot perioada aceluiași sistem (cele două stele au aceeași viteză unghiulară față de centrul de masă și aceeași perioadă).

$$T = \frac{11,08+10,92+11+11,08}{4} = 11,02 \text{ zile} \quad (0.3p)$$

Luminozitatea când ambele stele sunt vizibile:

$$L_0 = L_1 + L_2$$

Luminozitatea în minimul principal (steaua mai mică este mai fierbinte și este eclipsată în acest caz):

$$L_{\text{Minim principal}} = L_1$$

Luminozitatea în minimul secundar (când steaua mai mică tranzitează steaua mai mare):

$$L_{\text{Minim secundar}} = L_2 + \frac{L_1}{\pi R_1^2} (\pi R_1^2 - \pi R_2^2) = L_1 + L_2 - L_1 \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2$$

Utilizând acum procente date:

$$L_{\text{Minim principal}} - L_0 = \frac{n_{\text{minim principal}}}{100} \times L_0$$

$$L_1 - L_1 - L_2 = \frac{n_{\text{minim principal}}}{100} (L_1 + L_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -L_2 = \frac{n_{\text{minim principal}}}{100} (L_1 + L_2)$$

Împărțind ambele părți la  $L_2$ :

$$1 = \frac{|n_{\text{minim principal}}|}{100} \left( \frac{L_1}{L_2} + 1 \right)$$

De aici putem scoate raportul luminozităților:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{100}{|n_{\text{minim principal}}|} - 1$$

$$\frac{L_1}{L_2} = 4,056$$

Pentru minimul secundar:

$$L_{\text{Minim secundar}} - L_0 = \frac{n_{\text{minim secundar}}}{100} \times L_0$$

$$L_1 + L_2 - L_1 \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 - L_1 - L_2 = \frac{n_{\text{minim secundar}}}{100} (L_1 + L_2)$$

Împărțind ambele părți la  $L_1$ :

$$- \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 = \frac{n_{\text{minim secundar}}}{100} \left( 1 + \frac{L_2}{L_1} \right)$$

Raportul razelor va fi atunci:

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{|n_{\text{minim secundar}}|}{100} \left( 1 + \frac{L_2}{L_1} \right)}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 0,381 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 2,62 \text{ (0.4p)}$$

B3. Un sistem binar de stele este varianta cea mai probabilă. (1p) Argumente posibile:

- Perioadele orbitale ale celor două planete din B1 sunt egale – conform legii Kepler III cele două planete ar fi situate pe orbite cu semiaxe mari egale, fapt ce duce la instabilitate gravitațională;
- Raporturile  $\frac{\text{Raza planetei}}{\text{Raza stelei}}$  sunt foarte mari în cazul B1, nu ne așteptăm la astfel de planete. Cel mai mare raport raza planetei - raza stelei care s-a observat până acum este 0,13 – sistemul GJ1214;
- Comparativ cu cele 5 tranzituri de exoplanete, valorile absolute ale minimelor sunt mult mai mari (minimul secundar este atins cu o scădere de 12% a luminozității medii, pe când pentru exoplanetele date tranzitele scad luminozitatea medie cu maxim 2.5%)